

# 一种考虑人数分布特性的人员疏散格子气模型<sup>\*</sup>

宋卫国<sup>\*\*</sup> 张俊 胥旋 刘轩 于彦飞

中国科学技术大学火灾科学国家重点实验室, 合肥 230026

**摘要** 紧急情况下(如火灾等)的人员疏散研究可以为减少人员伤亡提供科学指导, 同时也可以为建筑设计提供实用的依据和方法. 但是在实际的疏散分析中, 往往不知道准确的待疏散人数, 而只能得到一个大概的估计值. 如何考虑人数不定带来的不确定性是人员疏散模型所关注的一个难点问题. 文中基于格子气模型框架, 结合平均场模型提出了一种考虑人数分布特性的人员疏散模型. 该模型的特色在于: 首先它可以根据人数估计值, 通过一次模拟得出疏散人数的区间估计值, 以及疏散出一定人数所需时间分布的区间估计, 从而可以得到疏散人数与疏散时间的定量关系. 其次该模型还可以分析人员的空间分布对疏散结果的定量影响, 并分析其不确定性.

**关键词** 人员疏散 疏散模型 格子气 区间估计

人员疏散模型是研究人员疏散的主要手段之一, 如何针对人群特征建立准确完善的模型和规则是研究的关键. 截至2005年初, 已有超过50种人员疏散模型在各类文献中被介绍<sup>[1]</sup>. 目前人员疏散模型研究大致可以分为两种: 一种是将人看作连续流动介质的宏观方法, 可以直接利用流体力学的相关研究成果; 另一种是微观的方法, 考虑了单个人员的个体差异以及人员的行为. 微观模型又包括连续性模型和离散模型, 连续性模型中最为著名的是Helbing等提出的社会力模型<sup>[2-9]</sup>, 离散模型以格子气模型(LG)<sup>[7-17]</sup>和元胞自动机(CA)<sup>[18-21]</sup>使用较多.

宏观模型方法忽略了个体间作用及个体的差异, 使得模拟结果跟实际不是很符. 连续模型虽然模拟结果可靠, 比较接近真实情况, 但是由于计算复杂度高、耗费计算资源多, 导致运算速度慢, 计算模拟时间随着人数的增加呈现指数增长, 不太适合行人众多情况下的模拟. 而格子气、元胞自动机等离散模型的特点是规则简单、运算速度快资源耗费小、耗时少, 因此目前使用的较多.

随着社会的发展和建筑技术的不断进步, 多种多样超高、超大建筑和特殊功能的建筑不断出现.<sup>[1,22]</sup> 这些超大面积的建筑通常被用作公共场所, 如体育场馆、电影院、酒吧、演唱会现场等大型的集会场所, 人员密度很大, 难以得到准确的人数, 而只能得到大体的人数. 要计算人员疏散所需的时间, 用普通的疏散模型或软件, 需要设定不同的人数分别多次计算, 才能确定出疏散时间的分布. 其次, 对于普通的模型或软件, 人员的空间分布对疏散时间有很大的影响, 一般都需要设定不同的初始人员分布进行多次计算取平均值, 使计算量进一步增加. 建筑空间越大, 人数和位置分布的不确定性就会越大, 普通的模型和软件的计算效率就会越低.

针对这一情况, 本文基于格子气模型和平均场理论, 提出了一种考虑人数分布特性的人员疏散格子气模型. 在该模型中, 已知建筑物内人数的大致范围时, 即可通过一次模拟计算得到一定置信水平下人员疏散时间的区间分布情况, 同时也可以得到某一段时间内疏散人数的区间分布, 解决了用普通

2007-09-04 收稿, 2007-12-03 收修改稿

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 50678164)和国家科技支撑项目(批准号: 2006BAK06B00)资助

<sup>\*\*</sup> E-mail: wgsong@ustc.edu.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

模型计算效率低的问题；另外本模型的另一特点是，计算的建筑空间越大，计算结果的可靠性就越高。

### 1 模型

模型采用以改进的格子气模型<sup>[9]</sup>为基础，结合平均场理论模型<sup>[7,8]</sup>建立的。考虑一个  $L \times L$ ，门宽为  $W$  (1 个门) 的房间中的人员疏散情况。模型中把整个房间平面进行均匀的网格划分，每个网格的尺寸为  $0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m}$ ，在疏散过程中假定人是按照无后退的有偏随机朝门口方向 (设为  $x$  轴) 行走，每个

时间步每个人最多只走一个格子，每个格子或者被一个人占据，或者为空，不能同时由多个人占据同一个格点。首先考虑均匀分布的情况，如果房间中人数的期望值为  $N$ ，那么初始时刻各元胞内有人概率均为  $P_0 = N / (L \times L)$ 。设  $P(i, j; t)$  表示  $t$  时刻格点  $(i, j)$  有人的概率，那么  $1 - P(i, j; t)$  就是该格点在  $t$  时刻无人的概率。在任意时刻，行人  $(i, j)$  根据相邻格点是否有人占据，可能面临 8 种情况<sup>[9]</sup>，如图 1 所示。其中圆圈代表该格点有人，箭头代表格点没人。设每种情况出现的概率分别为  $P_{\text{case}i}(i, j)$ ，则

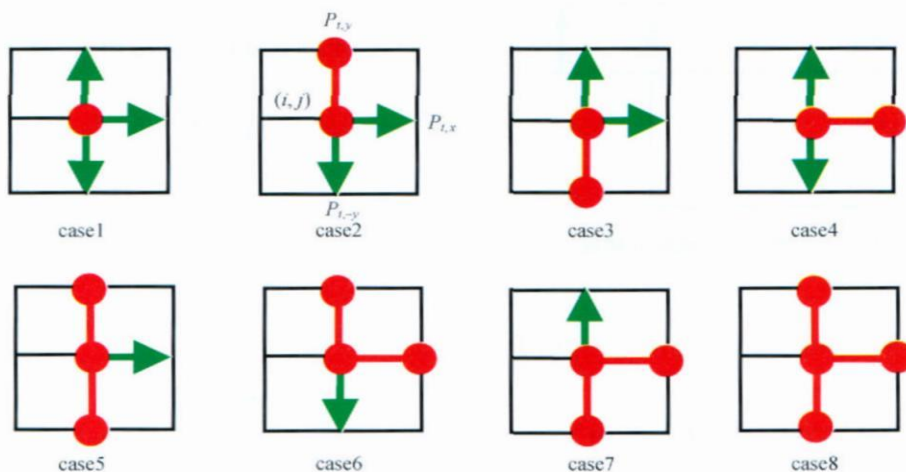


图 1 行人在格子上可能存在的所有情况

$$P_{\text{case}1}(i, j) = (1 - P(i, j + 1; t)) \times (1 - P(i - 1, j; t)) \times (1 - P(i + 1, j; t));$$

$$P_{\text{case}2}(i, j) = (1 - P(i, j + 1; t)) \times P(i - 1, j; t) \times (1 - P(i + 1, j; t));$$

$$P_{\text{case}3}(i, j) = (1 - P(i, j + 1; t)) \times (1 - P(i - 1, j; t)) \times P(i + 1, j; t);$$

$$P_{\text{case}4}(i, j) = P(i, j + 1; t) \times (1 - P(i - 1, j; t)) \times (1 - P(i + 1, j; t));$$

$$P_{\text{case}5}(i, j) = (1 - P(i, j + 1; t)) \times P(i - 1, j; t) \times P(i + 1, j; t);$$

$$P_{\text{case}6}(i, j) = P(i, j + 1; t) \times P(i - 1, j; t) \times (1 - P(i + 1, j; t));$$

$$P_{\text{case}7}(i, j) = P(i, j + 1; t) \times (1 - P(i - 1, j; t)) \times$$

$$P(i + 1, j; t);$$

$$P_{\text{case}8}(i, j) = P(i, j + 1; t) \times P(i - 1, j; t) \times P(i + 1, j; t);$$

设  $\Delta p_{t,x}(i, j, t)$ ,  $\Delta p_{t,y}(i, j, t)$ ,  $\Delta p_{t,-y}(i, j, t)$  分别表示  $t$  时刻格点  $(i, j)$  的人向邻近 3 个格点转移的概率，于是

$$\Delta p_{t,x}(i, j, t) |_{\text{case}i} = P(i, j; t) \times p_{t,x} |_{\text{case}i} + (1 - P(i, j; t)) \times 0 \quad (1)$$

$$\Delta p_{t,y}(i, j, t) |_{\text{case}i} = P(i, j; t) \times p_{t,y} |_{\text{case}i} + (1 - P(i - 1, j; t)) \times 0 \quad (2)$$

$$\Delta p_{t,-y}(i, j, t) |_{\text{case}i} = P(i, j; t) \times p_{t,-y} |_{\text{case}i} + (1 - P(i + 1, j; t)) \times 0 \quad (3)$$

(1)–(3) 式中右边第一项表示当  $(i, j)$  格点有

人的情况下, 该人可能向格相邻格点行走的概率; 第二项表示  $(i, j)$  点无人的情况下向相邻格点行走的概率, 即 0. 其中  $p_{t,x}, p_{t,y}, p_{t,-y}$  的确定与文献 [9] 相同, 下面做摘要介绍:

在文献 [9] 的模型中将空间如图 2 所示划分为 A, B, C 三个区域, 对于 A 区内的行人, 对应图 1 中的不同情况  $p_{t,x}, p_{t,y}, p_{t,-y}$  如下定义:

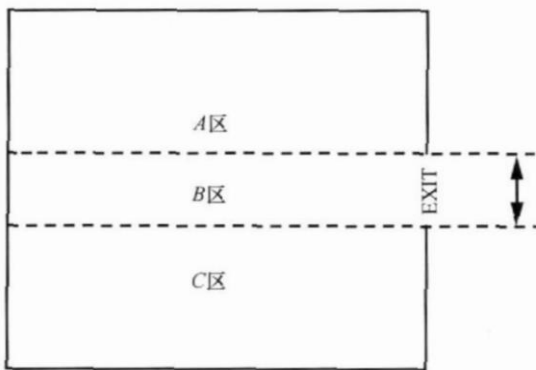


图 2 模型规则中对房间内的区域划分情况

- case1:  $p_{t,x} = D_x + (1-D)/3, p_{t,y} = (1-D)/3,$   
 $p_{t,-y} = D_y + (1-D)/3;$
- case2:  $p_{t,x} = D_x + (1-D)/2, p_{t,y} = 0,$   
 $p_{t,-y} = D_y + (1-D)/2;$
- case3:  $p_{t,x} = D + (1-D)/2, p_{t,y} = (1-D)/2,$   
 $p_{t,-y} = 0;$
- case4:  $p_{t,x} = 0, p_{t,y} = (1-D)/2,$   
 $p_{t,-y} = D + (1-D)/2;$
- case5:  $p_{t,x} = 1, p_{t,y} = 0, p_{t,-y} = 0;$
- case6:  $p_{t,x} = 0, p_{t,y} = 0, p_{t,-y} = 1;$
- case7:  $p_{t,x} = 0, p_{t,y} = 1, p_{t,-y} = 0;$
- case8:  $p_{t,x} = 0, p_{t,y} = 0, p_{t,-y} = 0;$

以上各式中  $D$  表示人员向门口前进的趋向性,  $D \in [0, 1]$ ;  $D_x = D \cdot |x-x_0| / (|x-x_0| + |y-y_0|)$ ,  $D_y = D \cdot |y-y_0| / (|x-x_0| + |y-y_0|)$  分别表示  $D$  在  $x$  方向和  $y$  方向上的分量,  $(x, y)$  为人员所在点的坐标,  $(x_0, y_0)$  为出口 (EXIT) 中心点的坐标.

相应地, C 区的情况只需类比 A 区的情况相应的

互换一下  $p_{t,y}, p_{t,-y}$  即可得到. 对于中间区域 B 区定义如下:

- case1:  $p_{t,x} = D + (1-D)/3, p_{t,y} = (1-D)/3,$   
 $p_{t,-y} = (1-D)/3;$
- case2:  $p_{t,x} = D + (1-D)/2, p_{t,y} = 0,$   
 $p_{t,-y} = (1-D)/2;$
- case3:  $p_{t,x} = D + (1-D)/2, p_{t,y} = (1-D)/2,$   
 $p_{t,-y} = 0;$
- case4:  $p_{t,x} = 0, p_{t,y} = 1/2, p_{t,-y} = 1/2;$
- case5—case8 的  $p_{t,x}, p_{t,y}, p_{t,-y}$  与 A, C 区的情况一样.

基于以上分析, 提出如下的模型更新规则:

$$\begin{aligned}
 P(i, j; t+1) = & \sum_{\text{case1}}^{\text{case8}} [P_{\text{case}i}(i-1, j) \times \\
 & \Delta p_{t,-y}(i-1, j, t) |_{\text{case}i}] + \\
 & \sum_{\text{case1}}^{\text{case8}} [P_{\text{case}i}(i+1, j) \times \\
 & \Delta p_{t,y}(i+1, j, t) |_{\text{case}i}] + \\
 & \sum_{\text{case1}}^{\text{case8}} [P_{\text{case}i}(i, j-1) \times \\
 & \Delta p_{t,x}(i, j-1, t) |_{\text{case}i}] + \\
 & \left\{ P(i, j; t) - \sum_{\text{case1}}^{\text{case8}} [P_{\text{case}i}(i, j) \times \right. \\
 & (\Delta p_{t,-y}(i, j, t) |_{\text{case}i} + \\
 & \Delta p_{t,y}(i, j, t) |_{\text{case}i} + \\
 & \left. \Delta p_{t,x}(i, j, t) |_{\text{case}i}) \right\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

公式 4 中前 3 项表示人员从与  $(i, j)$  格点相邻的  $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1)$  格点分别可能转移到  $(i, j)$  格点的概率; 后面的一项表示格点  $(i, j)$  的人可能停留在  $(i, j)$  点不移动的概率. 通过以上规则, 每一时间步利用随机序列随机不重复地选择格点对所有格点进行乱序更新, 这样便得到各时间步各个格点有人的概率值.

人员的分布属于二点分布, 即每个格点只存在两种状态: 有人或者无人. 根据中心极限定理, 当样本容量足够大时, 可以近似看作正态分布<sup>[23]</sup>:

$$\text{即 } \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i - \sum_{i=1}^n P_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n P_i(1 - P_i)}} \sim N(0, 1) \quad (5)$$

其中  $\epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{若该格点有人} \\ 0, & \text{若该格点无人} \end{cases}$

对于给定的置信水平  $1 - \alpha$ , 查正态分布  $N(0, 1)$  确定  $u_\alpha$ , 使得  $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha/2$ , 即

$$P \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i - \sum_{i=1}^n P_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n P_i(1 - P_i)}} \right| < u_\alpha \right) = 1 - \alpha \quad (6)$$

于是在各时间步各格点有人的概率  $P_i$  已知的情况下, 根据非正态总体未知参数估计的方法对各时间步疏散空间的剩余人数  $\sum_{i=1}^n \epsilon_i$  进行区间估计, 从而可通过(6)式计算出置信水平为  $1 - \alpha$  时各时间步疏散人数的置信区间为<sup>[23]</sup>:

$$\left[ \sum_{i=1}^n P_i - u_\alpha \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i(1 - P_i)}, \sum_{i=1}^n P_i + u_\alpha \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i(1 - P_i)} \right] \quad (7)$$

## 2 模拟结果及其分析

模拟一个  $50\text{ m} \times 50\text{ m}$  的正方形空间的人员疏散情况, 根据  $0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m}$  的网格划分, 该空间总共划分为 10000 个格点, 给出房间人数的期望值为 1000 人, 根据均匀分布情况, 初始时每个格点有人的概率为 0.1, 门外有人的概率为 0, 表示向主方向门口行走的倾向力取  $D = 0.5$ . 考虑门宽为  $0.5\text{ m}$  (即一个格点) 的情况, 设置开放边界条件, 当概率转移到门口时不再考虑. 由于这种概率转移的模型理论上可能会无限运行下去, 所以给其设置结束条件, 当房间内的各个格点的概率之和足够小 ( $0.01$ ) 时, 即此时房间内有人的概率已经很小, 可认为疏散结束.

图 3 给出了不同时刻疏散的状况, 不同颜色表示该格点有人的概率, 当概率在  $[0.00, 0.05]$  时,

用深绿色表示; 在  $[0.05, 0.10]$  时用红色表示; 在  $[0.10, 0.20]$  时用银色表示;  $[0.20, 0.50]$  时用黄色表示; 当概率在  $[0.50, 0.80]$  时用白色; 当概率在  $[0.80, 1.00]$  时用淡绿色表示.

根据区间估计公式(7)可以得出, 当房间内存在的期望人数为 1000 时, 在 95% (即  $\alpha = 0.05$ ) 的置信水平下, 在平均分布初始人数 (即在初始情况下各格点有人的概率  $p_i$  均为 0.1) 的情况下, 通过 10000 个样本值 (可以认为样本量足够大, 即满足公式(5)的条件) 即可由公式(7)求出这两个置信水平初始人数的分布区间为  $[941, 1059]$ .

记录各时间步房间内各个格点有人的概率值 (10000 个样本值), 用同样的方法可以估计出每个时间步疏散出去的人数, 得出图 4 的结果. 从图中可以得出, 在期望的疏散人数为 1000 人时, 在 95% 的置信水平疏散出去的实际人数的置信区间为  $[941, 1059]$ ; 同样可以从图 4 中得出, 在 95% 的置信水平时, 被疏散的人数为 1000 人时, 所需要的疏散时间大约是  $[1428 \text{ steps}, 1677 \text{ steps}]$ .

此外, 从图 4 还可以得出当期望疏散人数为 1000 时, 疏散不同人数所需要的时间的估计值, 以及在不同的时间所疏散出去的总人数的估计值.

图 5 显示不同的  $D$  值与疏散时间之间的关系.  $D$  表明了人员向门口行走的趋向性,  $D = 0$  表示人比较盲目, 不知道出口方向, 向 3 个方向行走的趋向相等;  $D = 1$  则代表人的方向性很明确, 在前方无阻挡的情况下向两侧行走的趋向为 0; 图 5 显示的是当疏散人数期望值为 1000 人时, 疏散出去 900 人所需的时间的上下限估计值与期望值跟疏散时间的关系曲线; 以及文献[9]中的以人员为基础的模型中, 给定 1000 人疏散出 900 人时  $D$  值与疏散时间的关系曲线, 其中文献[9]中模型对应的时间是经过 20 次模拟计算得到的平均值. 总体来说, 两种模型中随着  $D$  值的增大, 疏散时间均呈现非线性下降的趋势, 且当  $D > 0.5$  时,  $D$  值对疏散时间的影响逐渐减弱. 这也是比较合理的, 因为当  $D$  增大到一定程度后, 在这种单一出口的场景中, 人员向出口运动的趋向性对疏散的影响已经小于拥塞现象的出现对疏散结果造成的影响. 另外, 可以看到文

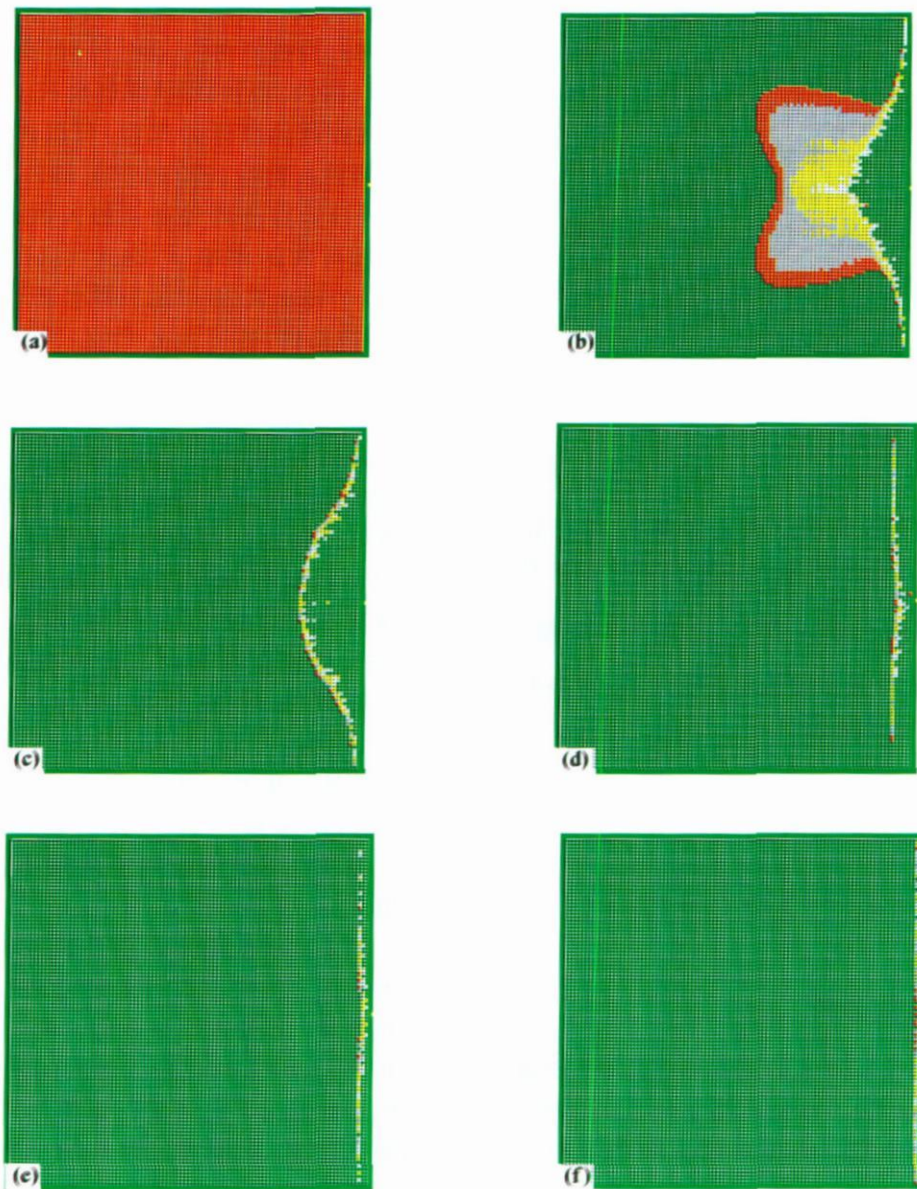


图 3 不同时间步的疏散状况

(a)  $t=0$  steps; (b)  $t=115$  steps; (c)  $t=197$  steps; (d)  $t=641$  steps;  
(e)  $t=1005$  steps; (f)  $t=1200$  steps

献[9]模型给定 1000 人进行的模拟结果与本文模型期望人数为 1000 时的模拟结果符合的较好, 也说明了模型的合理性.

本文又模拟了把整个房间平均分为左上(A区)、右上(B区)、左下(C区)、右下(D区)4个区域, 对整个空间进行不同的人员初始分布, 各区域

内部仍按平均分布, 为了保证初始的期望人数为 1000, 只需保证各区域的初始概率之和  $P_A + P_B + P_C + P_D = 0.4$ , 考虑到所研究的空间具有很好的对称性, 4个区域按照表 1 设定不同的平均初始概率, 考虑表中 6 种情况:



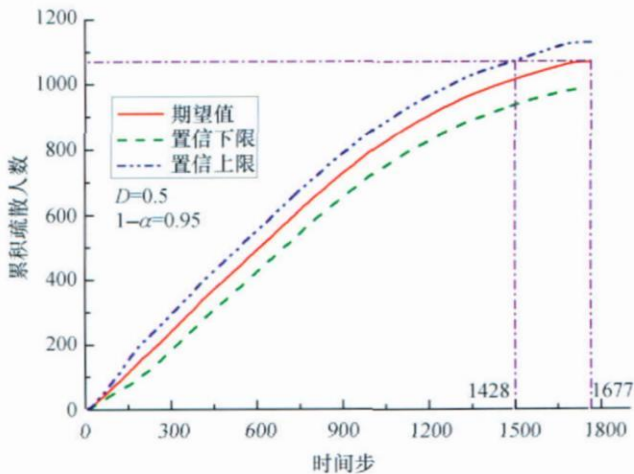


图 4 疏散时间与疏散人数关系图

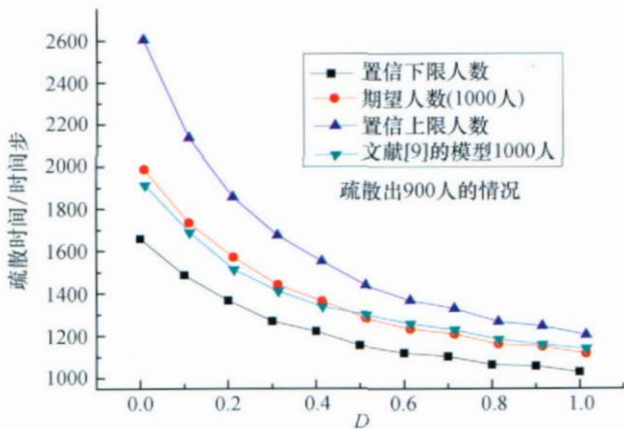


图 5 D 与疏散时间的相互关系

表 1 分块分布初始人数不同情况下各区域的取值

编号	$P_A$	$P_B$	$P_C$	$P_D$	期望人数/人	期望疏散时间/时间步
1	0.20	0.20	0.00	0.00	1000	1790
2	0.20	0.00	0.20	0.00	1000	1767
3	0.00	0.20	0.00	0.20	1000	1686
4	0.05	0.15	0.05	0.15	1000	1691
5	0.40	0.00	0.00	0.00	1000	1863
6	0.00	0.40	0.00	0.00	1000	1843
7	0.10	0.10	0.10	0.10	1000	1692

将这一模拟的结果和前面整个空间平均分布人数的情况做一对比, 分析了疏散的期望人数和时间的关系(图 6), 未对数据进行区间估计. 从图中看

出在疏散人数期望值为 1000 时, 除了分布 2 和 5 的曲线比平均分布的曲线偏低外, 其他的曲线与平均分布的曲线比较接近, 这主要是因为 2 和 5 的初始人数分布中, 人员都在远离门口的区域, 所以出现了疏散时间滞后这一现象, 即图 6 中曲线 2, 5 在前 55 个时间步疏散人数恒定为 0, 这是合理的. 曲线重合的较好, 说明在不同时间段内所能疏散出去的人数基本上一致. 同时从模拟的结果可以得出, 在各种初始分布中人员集中在一个区域的情况 5, 6 疏散时间最长, 其次是人员分布在两个区域但有一部分在远离门口的区域的情况 1, 2, 其他几种情况的疏散时间几乎一致, 而且是最短的. 分布 3 的时间最短, 这是由于在初始分布时人员都在门口附近, 而且 0.2 的初始概率造成堵塞的可能性相对较小, 而 6 的初始分布情况总的疏散时间最长, 可能是初始时刻人员集中分布在离门口较近的区域, 虽然可以保证疏散初始阶段疏散出的人数会较多, 然而随着疏散的进行, 人员行走又不考虑后退, 堵塞现象比其他情况反而严重, 结果导致总疏散时间最长.

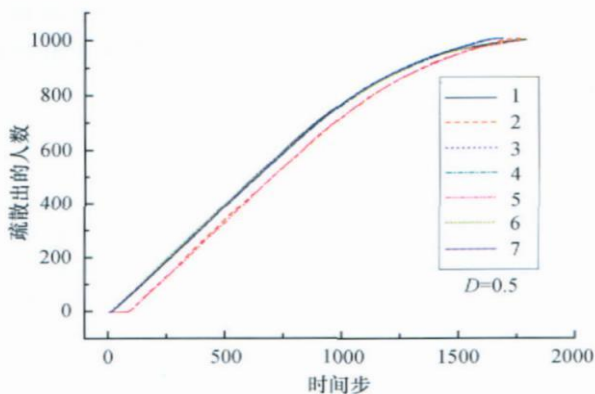


图 6 整个房间内人数平均分布的情况与房间分为 4 个区域再平均分布人的情况

### 3 结论

以改进的格子气模型为基础, 结合平均场理论模型及概率统计中区间估计的相关知识提出了一种考虑人数分布特性的人员疏散格子气模型. 在不明确建筑内精确的人数而只知道一个大概范围的情况下, 运用该模型可以通过一次模拟, 记录每个时间

步建筑物内各个格点有人的概率,即可对疏散人数和疏散时间进行估计,得出疏散时间和疏散人数的关系,疏散出一定人数所需的时间分布的区间估计值以及不同时间段内所能疏散出的人数的分布区间。

利用本文模型模拟了  $50\text{m} \times 50\text{m}$  的房间内初始期望人数为 1000 人的疏散情况,得到了疏散时间与疏散人数之间分布曲线;通过改变模型中表示人员向开口方向运动的趋向性  $D$  的值,研究了  $D$  对疏散时间的影响,最后,通过设置建筑内人员不同的初始空间分布,研究了人员空间分布对疏散时间的影响,得到了一些合理的疏散动力学现象及计算结果的变化特点。

虽然本文建立的模型基于一个规则较为简单的格子气模型,但是建立模型的方法是通用的,也可以应用于其他规则的格子气或者元胞自动机模型。运用该模型进行模拟计算,解决了普通疏散模型在解决待疏散人数的不确定性时遇到的问题,可以节省计算时间。另外,由于用到了参数估计,这就决定了样本值越多(即计算的空间越大),计算结果的可靠性也越大。当然,模型需要进一步的完善和发展,期望将来在模型中可以引入视野等对疏散时间的影响。

### 参 考 文 献

- Lo SM, Lin P, Huang HC, et al. A review on evacuation modeling. In: Lo SM, Yuen KK, Li WM, eds. Fire Science and Engineering, The 2nd Conference in the Development of Performance-based Fire Code. Hong Kong, 2005. Hong Kong: City University of Hong Kong Press, 2005, 273—290
- Helbing D, Farkas I, Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 2000, 407: 487—490
- 陈涛, 应振根, 申世飞, 等. 相对速度影响下社会力模型的疏散模拟与分析. *自然科学进展*, 2006, 16(12): 1606—1612
- Helbing D, Keltsch J, Molnar P. Modeling the evolution of human trail systems. *Nature*, 1997, 388: 47—50
- Helbing D, Molnar P. Social force model for pedestrian dynamics. *Phys Rev E*, 1995, 51: 4282—4286
- Helbing D, Schweitzer F, Keltsch J, et al. Active walker model for the formation of human and animal trail systems. *Phys Rev E*, 1997, 56: 2527—2539
- Takashi Nagatani. Dynamical transition in merging pedestrian flow without bottleneck. *Physica A*, 2002, 307: 505—515
- Takashi Nagatani. Dynamical transition and scaling in a mean-field model of pedestrian flow at a bottleneck. *Physica A*, 2001, 300: 558—566
- Yusuke Tajima, Takashi Nagatani. Scaling behavior of crowd flow outside a hall. *Physica A*, 2001, 292: 545—554
- Yusuke Tajima, Kouhei Takimoto, Takashi Nagatani. Scaling of pedestrian channel flow with a bottleneck. *Physica A*, 2001, 294: 257—268
- Muramatsu M, Nagatani T. Jamming transition in two-dimensional pedestrian traffic. *Physica A*, 2000, 275: 281—291
- Muramatsu M, Nagatani T. Jamming transition of pedestrian traffic at a crossing with open boundaries. *Physica A*, 2000, 286: 377—390
- Tajima Y, Nagatani T. Clogging transition of pedestrian flow in T-shaped channel. *Physica A*, 2002, 303: 239—250
- Nagatani T. Jamming transition in the traffic flow model with 2-level crossings. *Phys Rev E*, 1993, 48: 3290—3294
- Nagatani T. Jamming transition in a two-dimensional traffic flow model. *Phys Rev E*, 1999, 59: 4857—4864
- Chen T, Song WG, Fan WC, et al. Jamming transition of pedestrian evacuating flow in crossing exit. In: Huang P, Wang Y, Li S, et al. eds. Progress in Safety Science and Technology. Beijing: Science Press, 2002, III: 507—512
- Helbing D, Isobe M, Nagatani T, et al. Lattice gas simulation of experimentally studied evacuation dynamics. *Physical Review E*, 2003, 67: 067101
- 翁文国, 袁宏永, 范维澄. 一种基于移动机器人行为的人员疏散元胞自动机模型. *科学通报*, 2006, 51(23): 2818—2822
- Burstedde C, Klauck K, Schadschneider A, et al. Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton. *Physica A*, 2001, 295: 507—525
- Kirchner A, Schadschneider A. Simulation of evacuation process using a bionics-inspired cellular automaton model for pedestrian dynamics. *Physica A*, 2002, 312: 260—276
- Kirchner A, Nishinari K, Schadschneider A. Friction effects and clogging in a cellular automaton model for pedestrian dynamics. *Physical Review E*, 2003, 67: 056112
- 霍然, 袁宏永. 性能化建筑防火分析与设计. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2003, 9, 1—17
- 缪铨生. 概率与统计. 南京: 南京大学出版社, 2000, 10, 289—301